

**МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ГИМНАЗИЯ №3**

Рекомендована
Методическим Советом
МАОУ Гимназия № 3
Протокол № 6
«24» 02 2020г.
Председатель МС
О.Ю. Белова



**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ»**

Направление: естественнонаучное
Вид программы: стартовый
Уровень программы: одноуровневая
Возраст учащихся: 17-18 лет (11 класс)
Срок реализации: 1 год (34 часа)
Формы организации: очная

Автор//составитель:
ФИО: Персикова Ольга Вячеславовна,
учитель математики и физики

1.1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа «Решение задач повышенной сложности» для учащихся 11 класса составлена в соответствии с:

- Федеральным законом «Закон об образовании в Российской Федерации» (№273 от 29.12.2012г);
- Концепцией развития дополнительного образования детей (№1726-р от 04.09.2014г.);
- Порядком организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам (№196 от 09.11.2018г.);
- Санитарно-эпидемиологическим требованиям к устройству, содержанию и организации режима работы образовательных организаций дополнительного образования детей (2.4.4.3172-14 №41 от 04.07.2014г.);
- Стратегией развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года (№ ВК-53/09 от 19.01.2015г.);
- Профессиональным стандартом «Педагог дополнительного образования детей и взрослых» (№298н от 05.05.2018г.);
- Методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеобразовательных общеразвивающих программ в Республике Коми (№ 07-13/631 от 19 сентября 2019 г.)

Программа представляет собой дополнительный курс по развитию интеллектуальных и творческих способностей, учащихся в рамках образовательной области «Математика и информатика» с целью достижения личностных, метапредметных и предметных результатов.

Направленность программы – естественнонаучная.

Актуальность. Программа разработана на основании результатов изучения образовательных потребностей учащихся 11 класса и рекомендована учащимся 11 классов. Программа составлена с учетом возрастных и индивидуальных особенностей учащихся и рассчитана на 34 часа в год, 1 час в неделю.

Программа «Решение задач повышенной сложности» позволяет параллельно школьному курсу углублять полученные на уроках знания, исследуя изучаемую на уроках тему с помощью решения задач различного уровня сложности и решения их разными методами.

Вид программы по уровню освоения - программа стартового (ознакомительного) уровня.

Объем программы - программа рассчитана на 34 часа в год, 1 час в неделю.

Сроки реализации- 1 год.

Формы обучения – очная

Режим занятий – периодичность занятий 1 раз в неделю, длительность занятия 45 минут, 34 часа за год.

Особенности организации образовательного процесса:

- состав группы: постоянный;
- виды занятий по организационной структуре: групповые.

1.2.ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПРОГРАММЫ

Цели программы:

- развитие интереса к математике;
- формирование представлений о постановке, классификации, приемах и методах решения задач повышенной трудности.

Задачи программы:

обучающие

- овладеть способами решения задач повышенной трудности;

развивающие

- развивать интерес к изучению математике;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, а также последующего обучения в высшей школе;

воспитательные

- формировать представления о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- воспитания навыков сотрудничества в процессе совместной работы; осознанный выбор профильного обучения.

Данные задачи могут быть успешно решены, если на занятиях и в самостоятельной работе учащихся сочетаются теоретическая работа с достаточным количеством практических работ, предоставляется возможность создавать творческие проекты, проводить самостоятельные исследования.

1.3.СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ»

Тригонометрия. Формулы половинного угла. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразования простейших тригонометрических выражений. Простейшие тригонометрические уравнения. Решения тригонометрических уравнений. Простейшие тригонометрические неравенства. Арксинус, арккосинус, арктангенс числа.

Функции. Свойства функций: монотонность, четность и нечетность, периодичность, ограниченность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума (локального максимума и минимума). Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Обратная функция. Область определения и область значений обратной функции. График обратной функции.

Начала математического анализа. Понятие о производной функции, физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах. Нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком. Примеры применения интеграла в физике и геометрии. Вторая производная и ее физический смысл.

Уравнения и неравенства. Решение рациональных, показательных, логарифмических уравнений и неравенств. Решение иррациональных уравнений. Равносильность уравнений, неравенств, систем. Решение систем неравенств с одной переменной. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств. Метод интервалов. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений.

Геометрия. Прямые и плоскости в пространстве. Расстояния от точки до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы и плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

Учебный план

№	Наименование раздела, темы	Количе ство часов	Виды работы		
			Теоретичес кие занятия	Практические занятия	Форма контроля
11 класс					
1	Тригонометрия	8	3 часа	3 часа Решение задач	2 часа Защита презентаций ключевых задач по темам «Тригонометрические уравнения», «Тригонометрические неравенства», «Упрощение тригонометрических выражений»
2	Функции	7	3 часа	3 часа Решение задач	1 час Зачёт в форме математической карусели по теме «Функции»
3	Начала математического анализа	6	2 часа	3 часа Решение задач	1 час Тестирование
4	Уравнения и неравенства	6	2 часа	3 часа Решение задач	1 час Тестирование
5	Геометрия. Прямые и плоскости в пространстве	6	1 час	2 часа Решение задач	3 часа Защита презентаций по ключевым задачам темы
6	Обобщающее повторение	1		1 час Решение задач	
			Итого	34 часа	

1.4. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОГРАММЫ

Межпредметные связи:

Информатика: оформление результатов деятельности в виде презентаций, видеороликов

Физика: применение математических моделей при решении физических задач.

Подведение итогов работы планируется через участие в конкурсах, олимпиадах, написание тематических тестов.

В соответствии с возрастными особенностями учащихся изучение материала программы определяет различные **формы и методы** проведения занятий:

- сбор информации с помощью различных источников,
- смысловое чтение и работа с текстом задачи,
- подбор, составление и решение по интересам различных сюжетных задач: занимательных, задач с бытовым (экономическим) содержанием;
- проектная деятельность.

Формы представления результатов учащихся по освоению программы:

- тематическая подборка задач различного уровня сложности с представлением разных методов решения в виде **текстового документа, презентации** и другие формы по желанию учащихся;
- демонстрация решения задач.

В области учебных компетенций:

Уметь:

- организовывать процесс изучения и выбирать собственную траекторию образования;
- решать учебные и самообразовательные проблемы;
- связывать воедино и использовать отдельные части знаний.

В области исследовательских компетенций:

Уметь:

- получать и использовать информацию;
- обращаться к различным источникам данных и их использование;

Знать/понимать:

- способы поиска и систематизации информации в различных видах источника.

В области социально-личностных компетенций:

Уметь:

- видеть связи между настоящими и прошлыми событиями.

В области коммуникативных компетенций:

Уметь:

- выслушивать и принимать во внимание взгляды других людей;
- выступать на публике;
- читать графики, диаграммы и таблицы данных;
- сотрудничать и работать в команде.

В результате освоения программы «Решение задач повышенной сложности»

выпускник 11 класса научится:

знать/понимать

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

АЛГЕБРА

уметь

- выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы, применение вычислительных устройств; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма, используя при необходимости вычислительные устройства; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах;
- проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции;
- вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

уметь

- определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции;
- строить графики изученных функций;
- описывать по графику и в простейших случаях по формуле поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения;
- решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков.

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

уметь

- вычислять производные и первообразные элементарных функций, используя справочные материалы;
- исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

уметь

- решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, иррациональные и тригонометрические уравнения, их системы;
 - составлять уравнения и неравенства по условию задачи;
 - использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;
 - изображать на координатной плоскости множества решений уравнений и их систем;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- построения и исследования простейших математических моделей.

ГЕОМЕТРИЯ

уметь

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
- строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
- вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

2.1. КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК ПРОГРАММЫ

Программа «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ» 11 класс 1 раз в неделю, 34 часа за год.

Учебный период: с 02.09.2019 по 30.05.2020.

п/п	Даты начала учебных периодов (четвертей)	Даты окончания учебных периодов (четвертей)
1 четверть	02.09.2019	27.10.2019
2 четверть	05.11.2019	27.12.2019
3 четверть	09.01.2020	21.03.2020
4 четверть	30.03.2020	25.05.2020

Количество учебных недель: 34 учебных недель

Продолжительность каникул:

п/п	Даты начала учебных периодов (четвертей)	Даты окончания учебных периодов (четвертей)
Осенние	28. 10.2019	04.11.2019
Зимние	28.12.2019	08.01.2020
Весенние	23.03.2020	29.03.2020

Праздничные дни:

24.02.2020

08.03.2020, 09.03.2020

01.05.2020; 02.05.2020; 09.05.2020

Сроки контрольных процедур

Дата	Мероприятие	Класс	Деятельность
04.02.2020	Тестирование «Начала математического анализа»	11	Тестирование по теме «Начала математического анализа»
17.03.2020	Тестирование «Уравнения и неравенства»	11	Тестирование по теме «Уравнения и неравенства»
05.05.2020	Тестирование «Геометрия. Прямые и плоскости в пространстве »	11	Тестирование по теме «Геометрия. Прямые и плоскости в пространстве»

КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК ПРОГРАММЫ

п/п	Тема занятия	Кол-во часов	Дата проведения занятия (план)	Дата проведения занятия (факт)
Тригонометрия (8 часов)				
1	Формулы половинного угла	1	03.09.2019	
2	Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.	1	10.09.2019	
3	Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента, арктангенс числа	1	17.09.2019	
4	Преобразования простейших тригонометрических выражений	1	24.09.2019	
5	Простейшие тригонометрические уравнения	1	01.10.2019	
6	Решения тригонометрических уравнений	1	08.10.2019	
7	Простейшие тригонометрические неравенства	1	15.10.2019	
8	Обобщение и систематизация знаний	1	22.10.2019	
Функции (7 часов)				
9	Свойства функций: монотонность, четность и нечетность, периодичность, ограниченность	1	05.11.2019	
10	Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума (локального максимума и минимума). Графическая интерпретация	1	12.11.2019	
11	Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях	1	19.11.2019	
12	Обратная функция. Область определения и область значений обратной функции	1	26.11.2019	
13	Обратная функция. Решение задач	1	03.12.2019	
14	График обратной функции	1	10.12.2019	
15	Повторение и систематизация знаний по теме	1	17.12.2019	
Начала математического анализа (6 часов)				
16	Понятие о производной функции, физический и геометрический смысл производной	1	24.12.2019	
17	Уравнение касательной к графику функции. Применение производной к исследованию функций и построению графиков	1	11.01.2020	
18	Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах	1	14.01.2020	
19	Нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком	1	21.01.2020	
20	Примеры применения интеграла в физике и геометрии	1	28.01.2020	
21	Вторая производная и ее физический смысл	1	04.02.2020	
Уравнения и неравенства (6 часов)				

22	Рациональные уравнения	1	11.02.2020	
23	Уравнения и неравенства, содержащие абсолютную величину	1	18.02.2020	
24	Рациональные алгебраические уравнения с параметрами	1	25.02.2020	
25	Уравнения и неравенства на ограниченном множестве	1	03.03.2020	
26	Системы рациональных уравнений	1	10.03.2020	
27	Урок систематизации и обобщения материала	1	17.03.2020	
Геометрия. Прямые и плоскости в пространстве (6 часов)				
28	Расстояния от точки до плоскости	1	04.04.2020	
29	Расстояние от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями	1	07.04.2020	
30	Расстояние между скрещивающимися прямыми	1	14.04.2020	
31	Формула расстояния между двумя точками	1	21.04.2020	
32	Уравнения сферы и плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости	1	28.04.2020	
33	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	1	05.05.2020	
Обобщающее занятие (1 час)				
34	Обобщение и систематизация знаний	1	12.05.2020	
	<i>Итого</i>	<i>34 часа</i>		

2.2 УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

Материально-техническое обеспечение:

1. Занятия будут проводиться в кабинете математики.
2. Мультипроектор, ноутбук, интерактивная доска.
3. Таблицы, наборы по стереометрии.

Методическое обеспечение:

Подборка бесед, дидактических материалов, видеофильмов, таблиц, олимпиадных задач.

Организационное обеспечение:

Необходимый контингент учащихся (учащиеся 11 класса), расписание занятий.

Методы организации учебно-воспитательного процесса: групповой, индивидуальный.

Формы организации занятий

Занятия могут проходить в форме бесед, лекций, семинарских занятий, конференций. Особое внимание уделяется решению задач повышенной сложности.

Виды деятельности:

- построение алгоритма действий;
- работа в парах, взаимопроверка;
- постановка проблемной задачи и совместное ее решение;
- обсуждение решений в группах, взаимопроверка в группах;

- проектная деятельность.

Кадровое обеспечение - учитель математики и физики.

Общий трудовой стаж – 21 год.

Квалификационная категория – первая (дата присвоения 18 мая 2017года)

2.3. Формы аттестации и оценочные материалы.

Диагностика результатов освоения программы «Решение задач повышенной сложности» учащимися будет осуществляться в форме устного собеседования, группового или индивидуального выступления, просмотра творческих работ, тестирования, участие в конкурсах, олимпиадах, конференциях (распределение по блокам см. табл. «Учебный план».

Для реализации программы используются разные виды контроля:

Текущий – осуществляется посредством наблюдения за деятельностью ребенка в процессе занятий, фронтальных опросов, бесед, устных ответов учащихся.

Промежуточный – тестирование, семинары, защита мини-проектов, презентаций.

Итоговый – итоговое тестирование.

Критерии оценки выполнения программы курса (зачёт/незачёт):

- знание основных понятий и положений теории, законов, правил, формул, общепринятых символов обозначения величин, единиц их измерений (*проверяется тестированием*);
- умение отбирать, изучать и систематизировать информацию, полученную из научно-популярной литературы и других источников (*оценивается информация при представлении докладов, рефератов, и презентаций*).

Форма контроля	Критерии
Устный ответ	Ответ зачитывается в том случае, если учащийся дает точное определение и истолкование основных понятий, законов, теорий, правильно выполняет чертежи, схемы и графики: строит ответ по собственному плану, сопровождает рассказ новыми примерами, умеет применить знания в новой ситуации при выполнении практических заданий: может установить связь между изучаемым и ранее изученным материалом по курсу математики, а также с материалом, усвоенным при изучении других предметов
Тест	При тестировании все верные ответы берутся за 100%, тогда отметка зачтено выставляется , если выполнено более 45% теста
Презентация	Зачтено ставится за умение отбирать, изучать и систематизировать информацию, полученную из научно-популярной литературы и других источников, оформлять в презентацию. Требования к оформлению презентаций Единый стиль презентации Вся презентация должна быть выдержана в едином стиле , на базе одного шаблона . Стиль включает в себя:

общую схему шаблона: способ размещения информационных блоков;
общую цветовую схему дизайна слайда;
цвет фона или фоновый рисунок, декоративный элемент небольшого размера и др.;
параметры шрифтов (гарнитура, цвет, размер) и их оформления (эффекты), используемых для различных типов текстовой информации (заголовки, основной текст, выделенный текст, гиперссылки, списки, подписи);
способы оформления иллюстраций, схем, диаграмм, таблиц и др.

Необходимо обеспечить унификацию структуры и формы представления учебного материала.

Цветовая схема должна быть одинаковой на всех слайдах. Это создает у учащегося ощущение связности, преемственности, стильности, комфорта.

В стилевом оформлении презентации не рекомендуется использовать более 3 основных цветов и более 3 типов шрифта.

Следует избегать излишне пёстрых стилей — оформление слайда не должно отвлекать внимание слушателей от содержательной части доносимой информации.

Белое пространство признается одним из сильнейших средств выразительности, малогабаритный набор — признаком стиля.

Вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текстом, иллюстрациями).

При выборе элементов стиля (цветовых соотношений, размера текста, иллюстраций, таблиц) рекомендуется проводить проверку шаблона презентации на удобство чтения с экрана компьютера.

Правила использования цвета

Одним из основных компонентов дизайна учебной презентации является учет физиологических особенностей восприятия **цветов** человеком. К наиболее значимым из них относят :

стимулирующие (теплые) цвета способствуют возбуждению и действуют как раздражители (в порядке убывания интенсивности воздействия): красный, оранжевый, желтый;

дезинтегрирующие (холодные) цвета успокаивают, вызывают сонное состояние (в том же порядке): фиолетовый, синий, голубой, сине-зеленый; зеленый;

нейтральные цвета: светло-розовый, серо-голубой, желто-зеленый, коричневый;

сочетание двух цветов — цвета знака и цвета фона — существенно влияет на зрительный комфорт, причем некоторые пары цветов не только утомляют зрение, но и могут привести к стрессу (например, зеленые буквы на красном фоне);

наиболее хорошо воспринимаемые сочетания цветов шрифта и фона: белый на темно-синем, лимонно-желтый на пурпурном, черный на белом, желтый на синем.

Можно сформулировать следующие **рекомендации по использованию цвета** в презентации:

На одном слайде рекомендуется использовать не более трех базовых цветов: один для фона, один для заголовка, один для текста.

Составление цветовой схемы презентации начинается с выбора:

трех базовых цветов: фона — текста — заголовка;

трех главных функциональных цветов, которые используются для представления обычного текста, гиперссылок и посещенных ссылок.

Для фона и текста необходимо использовать контрастные цвета: текст должен хорошо читаться, но не резать глаза.

Следует обратить внимание на цвет гиперссылок (до и после использования): их цвет должен заметно отличаться от цвета текста, но не контрастировать с ним.

Согласно нормативам [1] в учебных презентациях для детей и подростков **не допускается** применять: более 4 цветов различных длин волн на одной электронной странице;

красный фон;

соотношение яркостей знаков и фона для позитивного изображения должно быть не менее 1:3 и для негативного изображения (выворотки) - 3:1.

Правила использования фона

Фон является элементом заднего (второго) плана, должен выделять, оттенять, подчеркивать информацию, находящуюся на слайде, но не заслонять ее.

Легкие пастельные тона лучше подходят для фона, чем белый цвет.

Для фона предпочтительны холодные тона.

Вместо того, чтобы использовать сплошной цвет лучше выбрать плавный градиентный переход гармонично сочетающихся цветов, мягкую

(неконтрастную) текстуру или нейтральный фон. Любой активный фоновый рисунок повышает утомляемость глаз обучаемого и снижает эффективность восприятия материала.

При планировании дизайна слайда следует всячески избегать проецирования текстовых блоков на области фона, содержащие изображения и декоративные элементы.

Правила использования текстовой информации

Не рекомендуется:

перегружать слайд текстовой информацией;
использовать блоки сплошного текста;
в нумерованных и маркированных списках использовать уровень вложения глубже двух;
использовать переносы слов;
использовать наклонное и вертикальное расположение подписей и текстовых блоков;
текст слайда не должен повторять текст, который преподаватель произносит вслух (зрители прочитают его быстрее, чем расскажет преподаватель, и потеряют интерес к его словам).

Рекомендуется:

сжатость и краткость изложения, максимальная информативность текста: короткие тезисы, даты, имена, термины — главные моменты опорного конспекта;
использование коротких слов и предложений, минимум предлогов, наречий, прилагательных;
использование нумерованных и маркированных списков вместо сплошного текста;
использование табличного (матричного) формата предъявления материала, который позволяет представить материал в компактной форме и наглядно показать связи между различными понятиями;
выполнение [общих правил оформления текста](#);
тщательное выравнивание текста, букв, маркеров списков;
горизонтальное расположение текстовой информации, в т.ч. и в таблицах;
каждому положению, идее должен быть отведен отдельный абзац текста;
основную идею абзаца располагать в самом начале — в первой строке абзаца (это связано с тем, что лучше всего запоминаются первая и последняя мысли абзаца);
идеально, если на слайде только заголовок, изображение (фотография, рисунок, диаграмма, схема, таблица и т.п.) и подпись к ней.

Правила использования шрифтов

При выборе **шрифтов** для представления вербальной информации презентации следует учитывать следующие правила:

Не рекомендуется смешивать разные *типы шрифтов* в одной презентации.

Учитывая, что *гладкие (плакатные) шрифты*, т.е. *шрифты без засечек* (типа Arial,Tahoma,Verdana и т.п.) легче читать с большого расстояния, чем шрифты с засечками (типа Times), то:

для основного текста предпочтительно использовать **плакатные шрифты**;

для заголовка можно использовать *декоративный шрифт*, если он хорошо читаем и не контрастирует с основным шрифтом.

Текст должен быть читабельным (его должно быть легко прочитать с самого дальнего места).

Рекомендуемые **размеры шрифтов**:

для заголовков — не менее 32 пунктов и не более 50, оптимально — **36** пункта;

для основного текста — не менее 18 пунктов и не более 32, оптимально — **24** пункта.

Не следует злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных), поэтому их допустимо использовать только для смыслового выделения небольших фрагментов текста.

Наиболее важный материал, требующий обязательного усвоения, желательно выделить ярче для включения ассоциативной зрительной памяти.

Для выделения информации следует использовать *цвет, жирный и/или курсивный шрифт*.

Выделение подчеркиванием обычно ассоциируется с *гиперссылкой*, поэтому использовать его для иных целей не рекомендуется.

Согласно нормативам [1-2] в учебных презентациях для детей и подростков:

отношение толщины основных штрихов шрифта к их высоте ориентировочно 1:5;

наиболее удобочитаемое отношение размера шрифта к промежуткам между буквами: от 1:0,375 до 1:0,75;

не допускается использовать узкое и (или) курсивное начертание гарнитуры шрифта.

Правила использования графической информации

Динамика взаимоотношений визуальных и вербальных элементов и их количество определяются функциональной направленностью

	<p>учебного материала. Изображение информативнее, нагляднее, оно легче запоминается, чем текст. Поэтому, если можно заменить текст информативной иллюстрацией, то лучше это сделать.</p> <p>При использовании графики в презентации следует выполнять следующие правила и рекомендации, обусловленные законами восприятия человеком зрительной информации:</p> <p>Графика (рисунки, фотографии, диаграммы, схемы) должна органично дополнять текстовую информацию или передавать ее в более наглядном виде.</p> <p>Каждое изображение должно нести смысл: желательно избегать в презентации рисунков, не несущих смысловой нагрузки, если они не являются частью стилевого оформления.</p> <p>Цвет графических изображений не должен резко контрастировать с общим стилевым оформлением слайда.</p> <p>Необходимо использовать изображения только хорошего качества. Для этого все изображения, помещаемые в презентацию, должны быть предварительно подготовлены в графическом редакторе.</p> <p>Недопустимо:</p> <ul style="list-style-type: none"> искажение пропорций; нарушение тонового и цветового баланса фотоизображений; использование изображений с пониженной резкостью; видимость пикселей на изображении; использование необработанных сканированных изображений; например — изображений с "грязным"(серым, желтым) фоном вместо белого, неконтрастных, размытых и т.п. <p>При подготовке в графическом редакторе изображения для помещения его на слайд презентации важное значение имеет выбор для него <i>оптимального размера и разрешения</i>.</p> <p>Иллюстрации рекомендуется сопровождать пояснительным текстом, пояснительная надпись преимущественно располагается под рисунком.</p> <p>Изображения лучше помещать левее текста: поскольку мы читаем слева-на-право, то взгляд зрителя вначале обращается на левую сторону слайда.</p> <p>Сложный рисунок или схему следует выводить постепенно.</p>
--	---

Необходимо четко указать все связи в схемах и диаграммах.

Правила использования звукового сопровождения

Звуковое сопровождение должно отражать суть или подчеркивать особенность темы слайда, презентации, оно не должно отвлекать внимание от основной (важной) информации. Не следует использовать музыкальное или звуковое сопровождение, если оно не несет смысловую нагрузку.

Если это фоновая музыка, то она должна не отвлекать внимание слушателей и не заглушать слова докладчика. Включение в качестве фонового сопровождения нерелевантных звуков (мелодий, песен) приводит к быстрой утомляемости обучаемых, рассеиванию внимания и снижению производительности обучения.

Необходимо выбрать оптимальную громкость, чтобы звук был слышен всем слушателям, но не был оглушительным.

Использование мультимедийных блоков (в первую очередь — звуковых) сильно ограничено в презентациях, которые самостоятельно просматриваются аудиторией одновременно на нескольких компьютерах (например, учащимися в компьютерном классе).

Также осторожно следует использовать звуковые фрагменты в презентациях, сопровождаемых докладчиком.

Главное правило озвучивания презентации: в каждый конкретный момент времени звуки исходят **только из одного источника** (из презентации или от докладчика).

Анимационные эффекты

Рекомендуется использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде. Однако не стоит чрезмерно насыщать презентацию такими эффектами, иначе это вызовет негативную реакцию аудитории.

Анимация должна быть сдержанна, хорошо продумана и допустима:

для демонстрации динамичных процессов;

для привлечения внимания слушателей, создания определенной атмосферы презентации.

Анимация текста должна быть удобной для восприятия: темп должен соответствовать технике чтения обучающихся.

Не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны

	<p>отвлекать внимание от содержания информации на слайде.</p> <p>Анимация не должна быть слишком активной. Особенно нежелательны такие эффекты, как вылет, вращение, волна, побуквенное появление текста и т.д. В учебных презентациях для детей и подростков такие эффекты, как <i>движущиеся строки</i> по горизонтали и вертикали, запрещены нормативными документами [1].</p> <p>Большое влияние на подсознание человека оказывает мультипликация. Ее воздействие гораздо сильнее, чем действие обычного видео. Четкие, яркие, быстро сменяющиеся картинки легко "впечатываются" в подсознание. Причем, чем короче воздействие, тем оно сильнее.</p> <p>Но при этом следует помнить: любой нерелевантный движущийся (анимированный) объект понижает восприятие материала, оказывает сильное отвлекающее воздействие, нарушает динамику внимания.</p> <p>Важнейшим свойством мультимедийного блока является скорость и качество его работы в составе презентации. С этой точки зрения наличие большого количества мультимедийных блоков в презентации нецелесообразно, так как может значительно замедлить ее работу.</p> <p>Учет указанных особенностей конструирования и оформления презентации в значительной степени влияет на эффективность восприятия представленной в ней информации.</p>
--	--

2.5. Методические материалы.

1) Методические материалы для проведения тестирования представлены в Приложении 1.

2) Образовательные технологии:

- использование игровых технологий.
- информационно-коммуникационные технологии.
- лично-ориентированное обучение.

Формы организации занятий

В соответствии с возрастными особенностями учащихся изучение материала программы определяет различные **формы работы: групповая, индивидуальная.**

Методы проведения занятий:

- сбор информации из различных источников,
- смысловое чтение и работа с текстом задачи,

- графическое и экспериментальное моделирование,
- подбор, составление и решение по интересам различных сюжетных задач: занимательных, экспериментальных с бытовым содержанием, с техническим и краеведческим содержанием, военно-техническим содержанием;
- проектная деятельность.

Формы представления результатов учащихся по освоению программы:

- тематическая подборка задач различного уровня сложности с представлением разных методов решения в виде **текстового документа, презентации** и другие формы по желанию учащихся;
- демонстрация эксперимента, качественной задачи с качественным (устным или в виде приложения, в том числе, презентацией) описанием процесса на занятии.

2.6. ЛИТЕРАТУРА

1. ЕГЭ 2020. Математика. Отличник ЕГЭ. Решение сложных задач. Панферов В.С., Сергеев И.Н. М.: Интеллект - Центр
2. ЕГЭ 2014. Репетитор. Математика. Эффективная методика. Лаппо Л.Д., Попов М.А. М.: Экзамен,
3. ЕГЭ 2020. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: 2020.
4. ЕГЭ 2014. Математика. Решение заданий типа C1. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней. <http://down.ctege.info/ege/2014/book/matem/matem2014reshenieC1koryanov.zip>
5. ЕГЭ 2014. Математика. Решение типа C4. Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. <http://down.ctege.info/ege/2014/book/matem/matem2014-C4prokofev-koryanov.z>

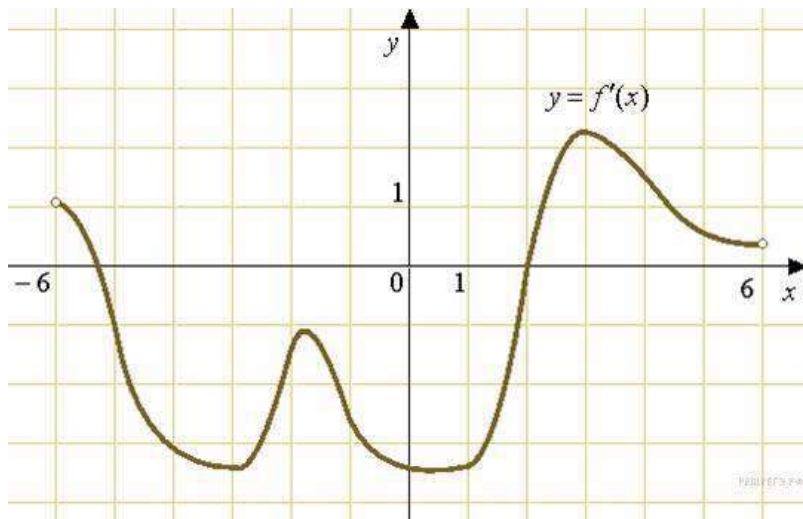
Интернет-источники:

1. Открытый банк задач ЕГЭ: <http://mathege.ru>
2. <http://egeru.ru>
3. <http://reshuege.ru/>

Приложение 1

Тестирование «Начала математического анализа»

1. На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

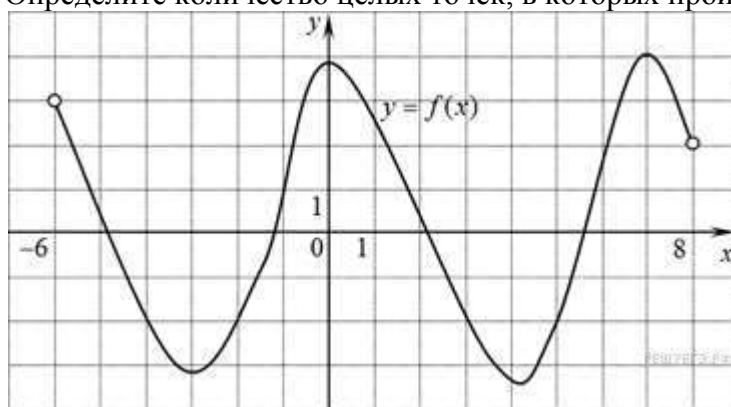


Решение.

Промежутки возрастания данной функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам $(-6; -5,2]$ и $[2; 6)$. Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.

Ответ: 14.

2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Решение.

Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах $(-3; 0)$ и $(4,2; 7)$. В них содержатся целые точки $-2, -1, 5$ и 6 , всего их 4.

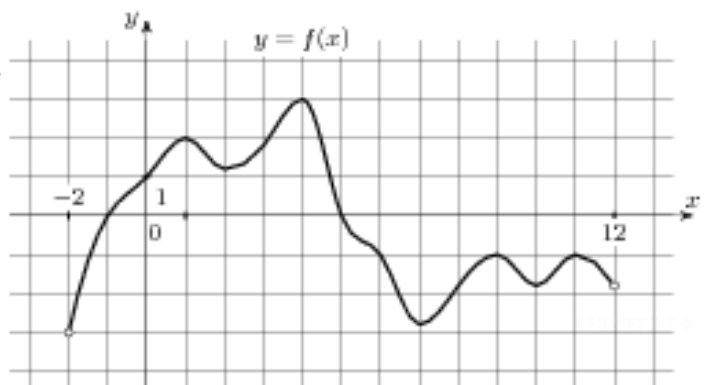
Ответ: 4.

3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

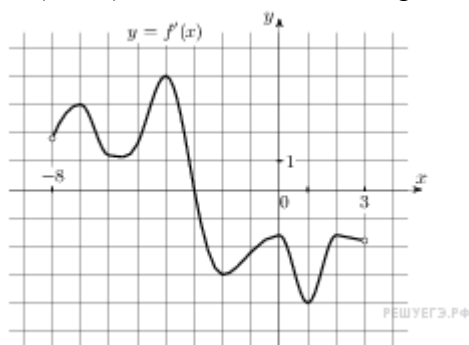
Решение.

Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна $1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44$.

Ответ: 44.



4. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

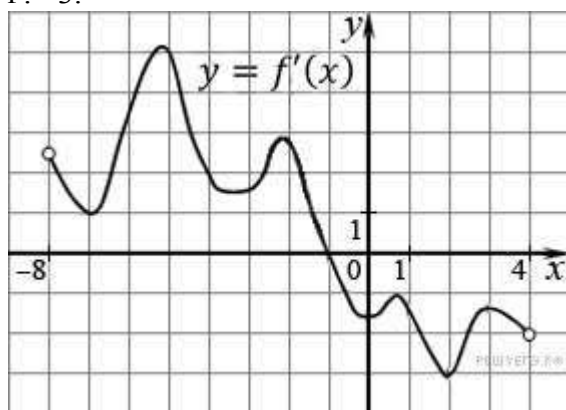


значение?

Решение.

На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -3 .

Ответ: -3 .



5.

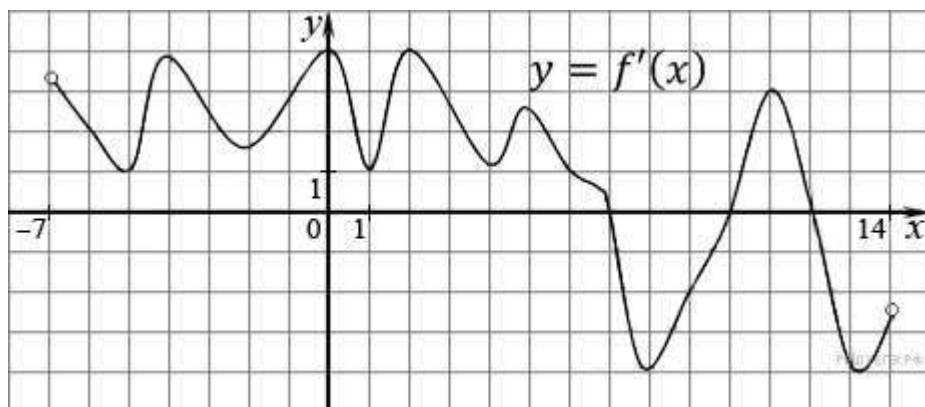
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Решение.

На заданном отрезке производная функции положительна, поэтому функция на этом отрезке возрастает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -7 .

Ответ: -7 .

6. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.

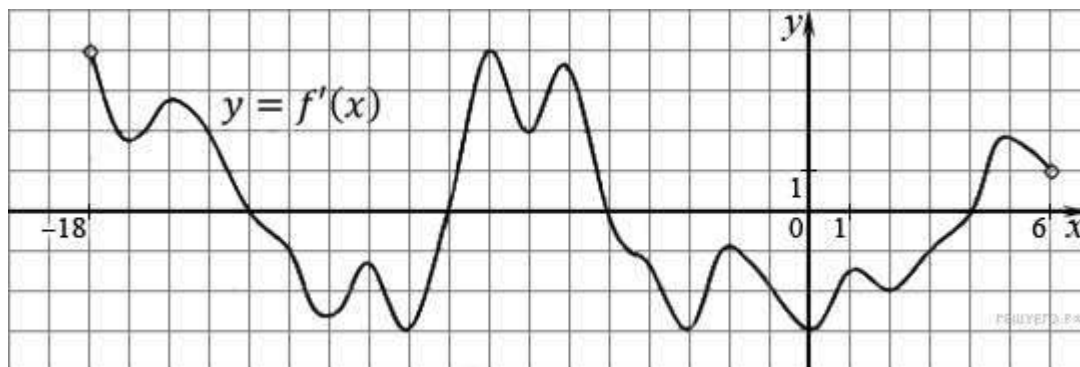


Решение.

Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке $[-6; 9]$ функция имеет одну точку максимума $x = 7$.

Ответ: 1.

7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13; 1]$.

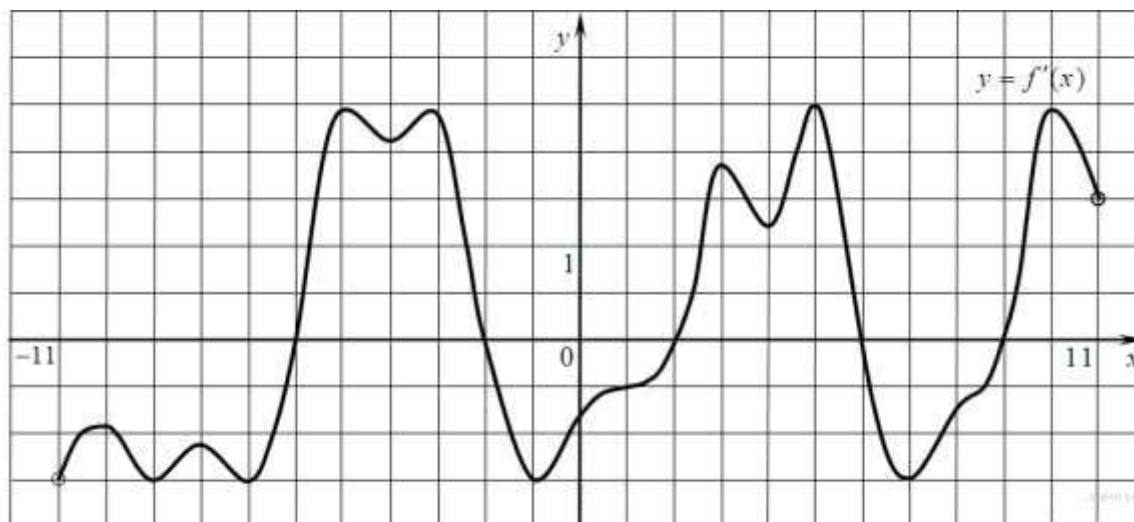


Решение.

Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке $[-13; 1]$ функция имеет одну точку минимума $x = -9$.

Ответ: 1.

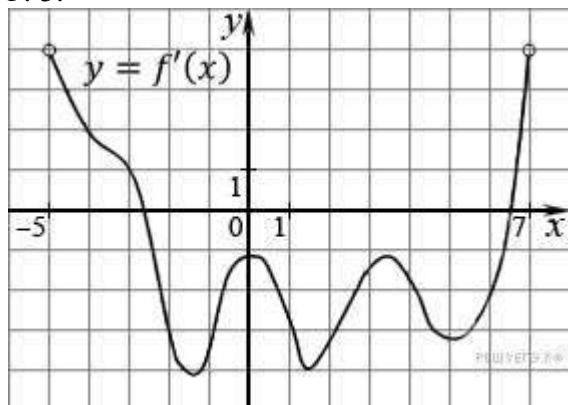
8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10; 10]$.



Решение.

Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной. Производная меняет знак в точках $-6, -2, 2, 6, 9$. Тем самым, на отрезке $[-10; 10]$ функция имеет 5 точек экстремума.

Ответ: 5.



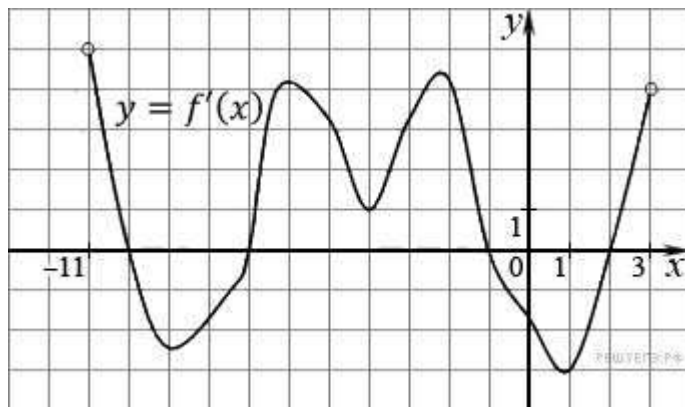
9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение.

Промежутки убывания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу $(-2,5; 6,5)$. Данный интервал содержит следующие целые точки: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ сумма которых равна 18.

Ответ: 18.

10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Решение.

Промежутки возрастания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции неотрицательна, то есть промежуткам $(-11; -10]$, $[-7; -1]$, $[2; 3)$. Наибольший из них — отрезок $[-7; -1]$, длина которого 6.

Тестирование «Уравнения и неравенства»

1. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \log_{11-x}(x+7) \cdot \log_{x+5}(9-x) \leq 0, \\ 64^{x^2-3x+20} - 0,125^{2x^2-6x-200} \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим второе неравенство системы:

$$64^{x^2-3x+20} - 0,125^{2x^2-6x-200} \leq 0 \Leftrightarrow 8^{2x^2-6x+40} \leq 8^{-2x^2+6x+200} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 40 \leq -2x^2 + 6x + 200 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 40 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 8.$$

Искомое решение — отрезок $[-5; 8]$.

Решим первое неравенство системы на множестве решений второго неравенства. На отрезке $[-5; 8]$ неравенство $\log_{11-x}(x+7) \cdot \log_{x+5}(9-x) \leq 0$ определено, и его

знак совпадает со знаком произведения $\frac{x+6}{10-x} \cdot \frac{8-x}{x+4}$. Поскольку на указанном отрезке числитель и знаменатель первой дроби положительны, получаем: $\frac{8-x}{x+4} \leq 0$, откуда $x < -4$ или $x \geq 8$. Тем самым, множество решений системы: $(-5; -4) \cup \{8\}$.

Ответ: $(-5; -4) \cup \{8\}$.

Приведём авторское решение.

Решим первое неравенство системы. Значения x , при которых определено первое неравенство: $-5 < x < -4$ и $-4 < x < 9$. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $-4 < x < 9$. Получаем, что $\log_{11-x}(x+7) > 0$; $x+5 > 1$. Тогда
$$\begin{cases} \log_{11-x}(x+7) \cdot \log_{x+5}(9-x) \leq 0, \\ -4 < x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x+5}(9-x) \leq 0, \\ -4 < x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 9-x \leq 1, \\ -4 < x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \leq x < 9$$

Второй случай: $-5 < x < -4$. Получаем, что $\log_{x+5}(9-x) < 0$; $\log_{11-x}(x+7) > 0$, следовательно, при $-5 < x < -4$ первое неравенство исходной системы верно.

Решение первого неравенства исходной системы: $(-5; -4) \cup [8; 9)$.

Решим второе неравенство системы:

$$64^{x^2-3x+20} - 0,125^{2x^2-6x-200} \leq 0 \Leftrightarrow 8^{2x^2-6x+40} \leq 8^{-2x^2+6x+200} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 40 \leq -2x^2 + 6x + 200 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 40 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 8.$$

Решение второго неравенства системы: $[-5; 8]$.

Пересекая полученные множества решений, находим решение исходной системы неравенств: $(-5; -4) \cup \{8\}$.

Примечание.

Укажем ещё один способ решить первое неравенство. Заметим, что область его определения — множество $(-5; -4) \cup (-4; 9)$. На этом множестве основание и аргумент множителя $\log_{11-x}(x+7)$ оба больше 1, поэтому он положителен. Тогда остаётся решить

неравенство $\log_{x+5}(9-x) \leq 0$, что на ОДЗ даёт $(x+4)(8-x) \leq 0$, откуда $x \leq 4$ $x \geq 8$, и окончательно с учётом ОДЗ: $(-5; -4) \cup [8; 9)$.

$$\begin{cases} (4^x - 8)\sqrt{4 - 2^x} \leq 0, \\ \log_{x^2}(15 + x - 2x^2) - \log_{x^2} \frac{2x+5}{3-x} \leq 1. \end{cases}$$

3. Решите систему неравенств

Решение.

Найдем ограничения на x системы в целом.

$$\begin{cases} 2^x \leq 4, \\ 2x^2 - x - 15 < 0, \\ \frac{2x+5}{x-3} < 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ \frac{1 - \sqrt{1+120}}{4} < x < \frac{1+11}{4}, \\ -2,5 < x < 3, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2,5 < x \leq 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Очевидно, равенство в первом нестрогом неравенстве будет выполнено при $x = 2$ или $x = 1,5$. При $x \neq 2$ и $x \neq 1,5$ будем также иметь: $2^{2x} < 2^3 \Leftrightarrow x < 1,5$.

Таким образом, решения первого неравенства представляются множеством $M = (-2,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 1,5] \cup \{2\}$.

Теперь рассмотрим второе неравенство системы.

$$\log_{x^2} |2x+5| + \log_{x^2} |x-3| - \log_{x^2} |2x+5| + \log_{x^2} |x-3| \leq 1 \Leftrightarrow 2\log_{x^2} |x-3| \leq 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_{x^2} (x^2 - 6x + 9) \leq \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(-6x + 9) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-1,5) \geq 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов.

Интервалы	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; 1,5)$	$(1,5; +\infty)$
Знак выражения	-	+	-	+

Решения второго неравенства системы: $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup [1,5; +\infty)$.

Решения исходной системы: $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{1,5; 2\}$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{1,5; 2\}$

$$\begin{cases} 3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0, \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \leq 1. \end{cases}$$

2. Решите систему неравенств

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 3^x$.

$$3y^2 - 28y + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (3y - 1)(y - 9) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 9.$$

Тогда $\frac{1}{3} \leq 3^x \leq 9$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-1 \leq x \leq 2$.
 2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x > 1$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq x^2 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

$$(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty).$$

Решение второго неравенства системы:

Пересекая решения неравенств, получаем решение системы.

Ответ: $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, 2]$.

3. Решите систему
$$\begin{cases} 3^{4x-1} + 3^{4x+1} \geq 80, \\ \log_{\frac{x}{2}}(4x^2 - 3x + 1) \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство:

$$3^{4x-1}(1+9) \geq 80 \Leftrightarrow 3^{4x-1} \geq 8 \Leftrightarrow 4x-1 \geq \log_3 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}(\log_3 8 + 1).$$

2. Решим второе неравенство $4x^2 - 3x + 1 > 0$ при всех x . При условиях $x > 0$ и $x \neq 2$ получаем неравенство

$$\left(\frac{x}{2} - 1\right)(4x^2 - 3x + 1 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2)(4x-3) \geq 0.$$

$$\left(0, \frac{3}{4}\right] \cup (2, +\infty).$$

При указанных условиях множество решений неравенства:

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Так как $1 < \log_3 8 < 2$, имеем $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}(\log_3 8 + 1) < \frac{3}{4}$, откуда получаем множество решений

системы: $\left[\frac{1}{4}(\log_3 8 + 1); \frac{3}{4}\right] \cup (2; +\infty).$

Ответ: $\left[\frac{1}{4}(\log_3 8 + 1); \frac{3}{4}\right] \cup (2; +\infty).$

6. Решите систему
$$\begin{cases} 5^{3x-1} - 5^{3x+1} \leq -72, \\ \log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство:

$$5^{3x-1}(1-25) \leq -72 \Leftrightarrow 5^{3x-1} \geq 3 \Leftrightarrow 3x-1 \geq \log_5 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{\log_5 3 + 1}{3}.$$

2. Решим второе неравенство. Заметим, что $3x^2 - 2x + 1 > 0$ при всех x . При условиях $x > 0$ и $x \neq 3$ получаем неравенство

$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)(3x^2 - 2x + 1 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-3)(3x-2) \geq 0.$$

При указанных условиях получаем: $0 < x \leq \frac{2}{3}$ или $x > 3$.

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. $0 < \log_5 3 < 1$, поэтому $\frac{1}{3} < \frac{\log_5 3 + 1}{3} < \frac{2}{3}$. Следовательно, $\frac{\log_5 3 + 1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ или $x > 3$.

Ответ: $\left[\frac{\log_5 3 + 1}{3}; \frac{2}{3}\right] \cup (3; +\infty)$.

Тестирование «Геометрия. Прямые и плоскости в пространстве»

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD .

а) Докажите, что точка T является серединой SM .

б) Найдите расстояние между NT и SC .

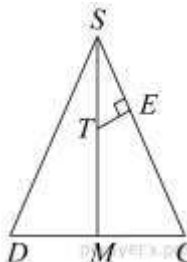
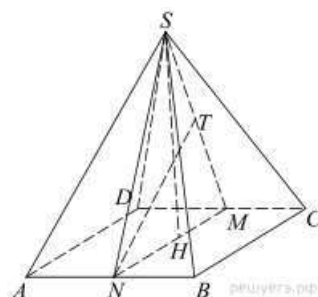
Решение.

а) Точка H лежит на отрезке MN . Так как $NC = ND$, то $TC = TD$. Это означает, что точка T лежит на SM . Таким образом, точки T и H лежат в плоскости SNM , перпендикулярной плоскости ABC .

$$\begin{aligned} AH &= \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}, \\ AS &= \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{15}, \\ MN &= AD = 2\sqrt{3}, \\ SM &= SN = \sqrt{SA^2 - AN^2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Значит, треугольник SNM равносторонний, а NT — его высота. Следовательно, T — середина SM .

б) Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки T на



прямую SC . Прямые NT и TE перпендикулярны, так как NT — высота пирамиды $NSCD$. Поскольку отрезок TE перпендикулярен как прямой SC , так и прямой NT , его длина и есть искомое расстояние.

Прямоугольные треугольники SET и SMC подобны, следовательно, $\frac{ET}{MC} = \frac{ST}{SC}$, откуда

$$ET = \frac{ST \cdot CM}{SC} = \frac{SM \cdot CD}{4SC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

2. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань ACC_1A_1 является квадратом.

- а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
 б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 4$, $BC = 7$.

Решение.

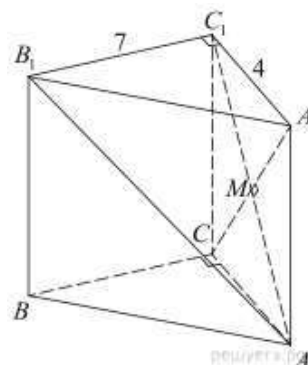
а) Заметим, что $B_1C_1 \perp C_1A_1$ как катеты прямоугольного треугольника, и $B_1C_1 \perp C_1C$, поскольку призма прямая. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1C_1 \perp (ACA_1)$. Кроме того, $A_1C \perp C_1A$ как диагонали квадрата.

Имеем: B_1A – наклонная, AC_1 – проекция на плоскость ACA_1 , A_1C – прямая в плоскости ACA_1 , перпендикулярная проекции. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AB_1 \perp CA_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть M – середина AC_1 . Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки M до прямой AB_1 , поскольку прямая A_1C перпендикулярна AB_1C_1 . Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1 , проведённой к гипотенузе:

$$\frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \frac{14\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: б)



3. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, боковое ребро PA — $12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α , перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K .

а) Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABCD$ в отношении 2 : 1, считая от вершины P .

б) Найдите расстояние между прямыми PH и BK .

Решение.

а) Пусть прямая AK пересекает прямую PH в точке M . Так как $PC \perp \alpha$ и $AK \subset \alpha$, то $PC \perp AK$. Далее имеем: $AC = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = AP$.

Значит, AK — высота и медиана правильного треугольника PAC . Следовательно, M — точка пересечения медиан этого треугольника, откуда и получаем $PM : MH = 2 : 1$, что и требовалось доказать.

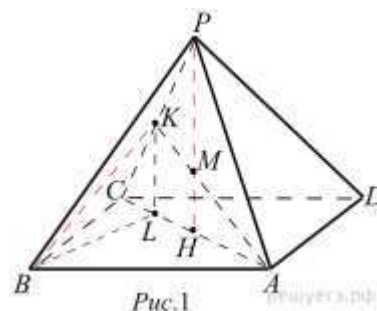
б) Пусть точка L — проекция точки K на плоскость ABC , $L \in AC$. Так как $KL \parallel PH$ и $PK = KC$,

то L — середина CH . Отрезок BL — проекция отрезка BK на плоскость ABC . Далее, поскольку $(ABC) \perp PH$, точка H — проекция прямой PH на плоскость ABC . Значит, расстояние между прямыми PH и BK равно расстоянию от точки H до прямой BL , то есть высоте HF треугольника BHL .

Далее имеем:

$$BH = \frac{BD}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2},$$

$$LH = \frac{AC}{4} = \frac{12\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2},$$



$$BL = \sqrt{BH^2 + LH^2} = 3\sqrt{10},$$

$$HF = \frac{2S_{\Delta BHL}}{BL} = \frac{BH \cdot LH}{BL} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .

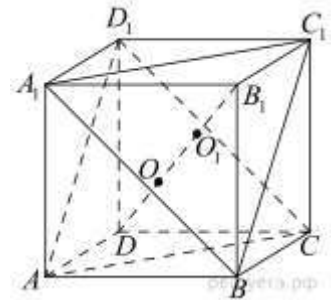
б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .

Решение.

а) Прямые BC_1 и AD_1 параллельны, поэтому угол между прямыми AC и BC_1 равен углу CAD_1 . Треугольник CAD_1 равносторонний, поэтому все его углы равны 60° .

б) Заметим, что прямые AC и BC_1 содержатся в параллельных плоскостях ACD_1 и $BC_1 A_1$. Значит, искомое расстояние равно расстоянию между этими плоскостями.

Обозначим центры треугольников ACD_1 и $BC_1 A_1$ через точки O и O_1 соответственно. Точка D равноудалена от вершин треугольника ACD_1 , поэтому проекция точки D на плоскость ACD_1 совпадает с O . Аналогично проекция точки D на плоскость $BC_1 A_1$ совпадает с O_1 , а проекции точки B_1 на плоскости ACD_1 и $BC_1 A_1$ также совпадают с точками O и O_1 соответственно. Значит, прямая DB_1 перпендикулярна плоскостям ACD_1 и $BC_1 A_1$ и содержит точки O и O_1 .



$$S_{ACD_1} = AC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$$

Объем тетраэдра $DACD_1$ равен 36, а площадь его основания

Значит, высота $DO = 2\sqrt{3}$. Аналогично $B_1 O_1 = 2\sqrt{3}$. Кроме того, $DB_1 = AB\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. Значит, $OO_1 = DB_1 - B_1 O_1 - DO = 2\sqrt{3}$.

Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребра равны 1. На продолжении отрезка $A_1 C_1$ за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1 C_1 = C_1 M$, а на продолжении отрезка $B_1 C$ за точку C отмечена точка N так, что $B_1 C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми $B_1 C_1$ и MN .

Решение.

а) Введем Систему Координат, как показано на рисунке. В этой С. К. имеем:

$$M(-1; 2; 1), N(-1; 1; -1), B_1(1; 1; 1), C_1(0; 1; 1)$$

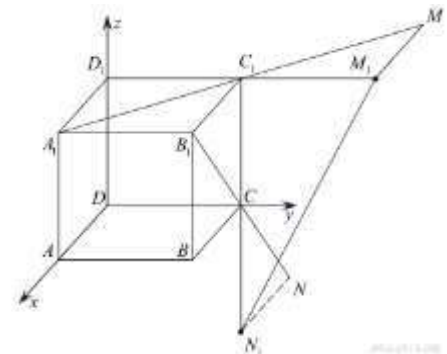
$$\vec{MN} = (0; -1; -2), \vec{MB_1} = (2; -1; 0), \vec{B_1 C_1} = (-1; 0; 0)$$

$$|\vec{MN}| = \sqrt{5}, |\vec{MB_1}| = \sqrt{5}.$$

Таким образом, у нас получилось, что $MN = MB_1$.

б) Заметим, что проекцией $B_1 C_1$ на плоскость $DCC_1 D_1$ является точка C_1 .

Спроектируем MN на плоскость $DCC_1 D_1$, получим отрезок $M_1 N_1$. Таким образом, задача свелась к нахождению расстояния от точки C_1 до $M_1 N_1$. Это расстояние равно длине высоты, проведенной из вершины C_1 треугольника $N_1 C_1 M_1$. Очевидно, что данный треугольник



является прямоугольным, а его катеты равны 2 и 1. Тогда его гипотенуза находится по теореме Пифагора, она равна $\sqrt{5}$. Следовательно, высота равна

$$h = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$